ОТКУДА МЫ ЗНАЕМ,
ЧТО ТАКОЕ
ТОЧКА?

Пособие

МОСКВА – 2012

Локшин А.А., Иванова Е.А.

Откуда мы знаем, что такое точка? Пособие. Изд.2, исправленное и дополненное.

Пособие адресовано школьным учителям, а также студентам педвузов и педагогических колледжей, изучающим математику. Рассмотрены вопросы моделирования при решении текстовых задач, а также избранные авторами темы из комбинаторики, логики, алгебры и геометрии. Во втором издании добавлен раздел, посвященный математическим фокусам, основанным на применении признаков делимости.49с.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В брошюре рассмотрены некоторые вопросы из теории множеств, логики, комбинаторики и элементарной геометрии, недостаточно освещенные в имеющейся литературе и представляющие, на взгляд авторов, интерес для студентов пединститутов (в особенности, для студентов факультетов начальных классов), школьников-старшеклассников и учителей математики. Во втором издании помещен новый раздел, посвященный математическим фокусам, основанным на недостаточно широко известных обобщениях некоторых классических признаков делимости.

Авторы
Москва, 2012

1. ПАРАДОКС МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ[1]

Метод математической индукции является, как известно, могучим инструментом, позволяющим доказывать многие математические утверждения, не поддающиеся иным методам. Соль метода в том, что он позволяет, так сказать, «опереться на недоказанное».

В простейшем случае действие метода выглядит так. Пусть имеется некоторое утверждение $A(n)$, зависящее от натурального номера n ($n = 1,2,\ldots$). Тогда если $A(1)$ истинно и если из истинности $A(n)$ следует истинность $A(n+1)$, то $A(n)$ истинно при всех натуральных n.

Итак, доказывая истинность $A(n+1)$, мы можем опереться на недоказанную истинность $A(n)$ – великолепная возможность, которую не предоставляют никакие другие методы. (Как мы увидим ниже, за этой возможностью скрывается довольно любопытный парадокс.)

Приведенная выше формулировка метода математической индукции может быть кратко записана, с использованием общепринятых математических терминов, в следующем виде:

$$\frac{\begin{array}{c} A(1) \\ (\forall n \in N)A(n) \to A(n+1) \end{array}}{(\forall n \in N)A(n)} \qquad (1)$$

Здесь формулы над чертой – так называемые *посылки*, истинность которых мы должны предварительно установить, формула под чертой – *вывод*, истинность которого обеспечивается истинностью посылок; N обозначает множество натуральных чисел.

---

[1] См. [1].

Парадокс, однако, заключается в том, что, «применяя математическую индукцию», мы пользуемся не методом (1), а другими соображениями.

Действительно, посмотрим, как фактически проводится доказательство «по индукции». Вначале доказывается справедливость $A(1)$, и пока мы, как будто, действуем в согласии со схемой (1). Однако наш следующий шаг представляет собой мыслительную операцию, в корне отличную от второй строчки в схеме (1). Фактически, мы рассуждаем так:

«Предположим, что $A(n)$ истинно при **некотором произвольном** n. Докажем, что тогда $A(n+1)$ тоже истинно».

Без слова «некоторый» здесь обойтись невозможно, так как в противном случае наше предположение звучало бы так:

«Предположим, что $A(n)$ истинно при произвольном n», т.е. мы предположили бы то, что требуется доказать! (Без слова «произвольный», очевидно, тоже невозможно обойтись.) В итоге вместо (1) мы пользуемся на самом деле схемой

$$\frac{\begin{array}{c} A\,(1) \\ A(n)\ \text{истинно при некотором произвольном}\ n \to A(n+1)\ \text{истинно} \end{array}}{(\forall n \in N)A(n)} \qquad (2)$$

Заметим, что понятие «некоторый произвольный» не удается выразить с помощью математических кванторов $\forall$ (для любого) и $\exists$ (существует). В сущности, это говорит о несовершенстве (бедности) «общепринятого» математического языка и о том, что так называемая «содержательная» логика, в рамках которой работает большинство математиков, не совпадает с формальной логикой, в которой операция взятия «некоторого произвольного» элемента не предусмотрена.

2. ОТКУДА МЫ ЗНАЕМ, ЧТО ТАКОЕ ТОЧКА?

В этом параграфе мы обсудим один из интереснейших вопросов, лежащих на стыке математики и психологии. В первом параграфе мы уже сталкивались с операцией *выбора некоторого произвольного элемента.* В статье [2], где эта операция была подробно рассмотрена, отмечалось, в частности, что упомянутая операция неявно апеллирует к существованию у человека свободы воли. Тем самым, как было отмечено в [2], такое понятие как *независимая переменная* также базируется на предположении о существовании у человека свободы воли[1].

Для преподавателя математики этот вопрос вовсе не является второстепенным – например, на уроках геометрии невозможно обойтись без «*выбора произвольной точки*».

Любознательный ученик может тогда спросить:

– А что такое произвольная точка? Это то же самое, что случайно выбранная точка?

Ответ преподавателя будет, конечно, отрицательным. Заменив *произвольно* выбранную точку на точку, выбранную *случайно*, мы не сможем провести ни одного сколько-нибудь содержательного доказательства. Ведь случайно выбранная точка может совершенно случайно всегда оказываться, например, началом координат…

Но в то же время *некоторая произвольно выбранная точка* – это не то же самое, что *каждая точка*. Мы просто физически не можем выбрать каждую точку на плоскости – человек, как утверждают психологи, не способен одновременно уследить больше чем за семью объектами!

Преподаватель математики вовсе не должен перегружать своих учеников философскими размышлениями о наличии или отсутствии свободы воли у человека. Но понимать, что «выбор некоторого произвольного элемента»[2] – это операция, без которой математика беспомощна, на наш взгляд необходимо.

Похоже, однако, что представление о свободе воли является для человека врожденным, а сомнение в ее наличии есть некое «отклонение от нормы». К такому выводу нас подталкивают следующие обстоятельства.

Процитируем вначале учебник по высшей геометрии [3, с. 205]: ***«…точки, прямые и плоскости как образы нашего геометрического воображения не поддаются математическому описанию».***

---

[1] Рассуждая аналогично [2], можно показать, что и понятие *бесконечность* основано на понятии свободы воли.

[2] Не путать с аксиомой выбора!

– Как же так? – может воскликнуть читатель, искушенный в математике. – А как же аксиомы Гильберта или аксиомы Клейна? Наконец, аксиомы Евклида? Разве они не определяют, что такое точка, прямая и плоскость?

– Конечно, определяют, – ответим мы. – Но только в некоем абстрактном пространстве, а не в пространстве наших зрительных образов. То есть определяют, но не то, что нужно…

Иными словами, с помощью логики, опираясь на информацию, поступающую от органов чувств, придти к понятию «точка», по-видимому, невозможно. Но откуда же тогда взялось это понятие?

Процитирую в этой связи статью Александра Маркова («Элементы», 21.06.10):

<<Ключевую роль в пространственном мышлении у млекопитающих играют три группы нейронов: «клетки места», «клетки направления» и «клетки координатной сетки». Две команды исследователей независимо друг от друга обнаружили, что у маленьких крысят, впервые в жизни отправившихся на прогулку, уже есть нормально работающие клетки первых двух типов, и только клетки третьего типа появляются немного позже. По-видимому, это означает, что восприятие пространства у млекопитающих в значительной мере является врожденным.>>

Любопытно сравнить результаты этих опытов с методикой обучения младших школьников понятию «точка» (сообщено авторам Н. Лукановой):

Если просто нарисовать на листе бумаги точку фломастером или ручкой, то у ребенка может создаться впечатление, что точка – это небольшая клякса, поэтому добавляют: «*Точка не имеет толщины, точка – это место*». Замечательно, что дети легко понимают, что именно имеется в виду.

Приведу теперь еще одну цитату из вышеупомянутой статьи А. Маркова:

<<… известно, что основные нейрологические механизмы пространственного восприятия у людей и крыс примерно одинаковы, поэтому результаты этих исследований почти наверняка приложимы к людям.>>

Однако, если допустить, что представление о точке является для человека врожденным, то, похоже, приходится признать, что врожденным является и (неявное) представление о свободной воле. Действительно, в этом случае врожденным должно быть и представление об окружающем пространстве как о континууме, состоящем из точек. Но что значит добраться из точки A в точку B по пути AB? Это значит, что какова бы ни была *произвольно взятая* точка на этом пути, в ней придется побывать…

Замечание. Итак, “переменная” и ”бесконечность” – понятия , непосредственно базирующиеся на (по-видимому, врожденном) понятии “свобода воли”. А как обстоят дела с обычным (количественным) натуральным числом - неужели и оно опирается на понятие “свобода воли”? На наш взгляд , ответ на этот вопрос , как ни странно, положителен. Действительно, чтобы определить, например, (количественное) число “пять”, нам нужно мысленно соединить тоненькими ниточками пальцы руки с рассматриваемым набором предметов, устанавливая таким способом взаимно-однозначное соответствие между пальцами и этими предметами. Но эта процедура невозможна без представления о том, что ни одна мысленно проведенная нить не должна рваться и мы , путешествуя взглядом вдоль нее, должны побывать в *произвольно взятой точке* этой нити.

3. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ: КАКОЙ МЕТОД ПРЕДПОЧЕСТЬ?

Цель этого параграфа – разобраться в том, при решении *какого именно* класса текстовых задач алгебраический метод должен в начальной школе уступать место арифметическому методу.

С точки зрения педагога арифметический метод хорош тем, что он одновременно активизирует и наглядно-образное мышление ученика, и его логику. Алгебраический метод обычно быстрее ведет к цели, но в значительно меньшей степени нацелен на развитие мышления в широком смысле этого слова.

Решая задачу арифметическим способом, младший школьник, как правило, оперирует именованными числами, что соответствует наиболее развитому у него типу мышления – наглядно-образному.

В то же время решение задач алгебраическим способом минимизирует нагрузку на наглядно-образное мышление ребенка, решение текстовой задачи в основном сводится к оперированию символами. Научить ребенка такому оперированию, безусловно, важно. Однако, здесь имеются «подводные камни». Дело в том, что *при решении некоторых задач, у детей происходит утрата понимания смысла производимых ими математических действий, и задача перестает выполнять свою развивающую функцию, превращается в рутинный «пример».* Рассмотрим в этой связи две задачи, предлагавшиеся третьеклассникам, обучавшимся по системе Л.Г. Петерсон.

Задача А. Мышка и птичка (игрушечные) вместе стоят 10 рублей. 5 мышек и 6 птичек стоят 56 рублей. Сколько стоят мышка и птичка по отдельности?

Решение 1 (арифметическое).

1) Сколько комплектов игрушек (мышка плюс птичка) можно составить из 5 мышек и 6 птичек? – 5 комплектов.

2) Сколько стоят эти 5 комплектов игрушек? $5 \cdot 10 = 50$ (руб.)

3) Сколько птичек останется без мышек? – Одна.

4) Сколько стоит 1 птичка? $56 - 50 = 6$ (руб.)

5) Сколько стоит одна мышка? $10 - 6 = 4$ (руб.)

Ответ: мышка стоит 4 рубля, птичка стоит 6 рублей.

Решение 2 (алгебраическое). Пусть x – цена мышки, y – цена птички. Тогда система из двух уравнений, соответствующая задаче A, должна была бы содержать именованные величины и иметь вид

$$x + y = 10 \text{ (руб.)}, \quad 5x + 6y = 56 \text{ (руб.)}$$

Фактически же, математические преобразования обычно проводят над системой, в которой имена величин опускаются; в данном случае – над системой

$$x + y = 10, \quad 5x + 6y = 56. \qquad (*)$$

Умножая первое уравнение системы (*) на 5 и вычитая его из второго, получаем $y = 6$, а затем из первого уравнения находим $x = 4$. Теперь в ответе имена величин вспоминают:

Ответ: мышка стоит 4 рубля, птичка стоит 6 рублей.

Заметим, что действия при решении алгебраической системы (*), в сущности, те же, что и при решении этой задачи арифметическим способом. Как показывает наш опыт, дети в состоянии объяснить смысл каждого преобразования в процессе решения системы (*) на языке наглядных образов. В результате решение, полученное алгебраическим способом, способствует закреплению и упорядочению знаний, служит связующим звеном между наглядно-образным и абстрактным (символьным) мышлением. Рассмотрим теперь другую известную задачу (см., например [5]).

Задача Б. Десять мышек и птичек (птички и мышки настоящие, не игрушечные) съели 56 зерен. Каждая мышка съела 5 зерен, а каждая птичка – 6 зерен. Сколько было мышек и сколько птичек?

Решение (алгебраическое). Пусть x – число мышек, y – число птичек. Составляем соответствующую задаче Б систему уравнений, содержащих именованные величины:
$x + y = 10$ (животных), $5x + 6y = 56$ (зерен). Опуская имена величин, приходим к системе

$$x + y = 10, \quad 5x + 6y = 56. \qquad (**)$$

Решая ее, получаем: $x = 4$, $y = 6$.

Ответ: 4 мышки, 6 птичек.

Система (**) формально совпадает с системой (*) и решается тем же способом, что и система (*). Однако, как показывает наш опыт, дети, решив сначала задачу А алгебраическим способом и дав своему решению правильное истолкование на языке наглядных образов, затруднялись объяснить смысл аналогичных преобразований системы (**). Некоторые говорили так: «Нужно взять пять комплектов животных и вычесть их из 56 зерен…» *Причина затруднений, очевидно, была в том, что уравнения системы* (**), *в отличие от системы* (*), *содержат величины разных наименований*.

На наш взгляд, на начальном этапе обучения область применения алгебраического метода должна быть ограничена текстовыми задачами, решение которых не приводит с системам, содержащим величины разных наименований.

4. МЫСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

Моделирование «в отрезках», используемое в системе Л.Г. Петерсон, существенно облегчает детям понимание текстовых задач, в значительной степени устраняет случайное манипулирование числовыми данными.

В то же время, у некоторых детей складывается представление о том, что моделирование в отрезках есть универсальный метод, пригодный для решения «всех задач».

Мы ограничимся здесь рассмотрением текстовых задач для начальной школы, не включающим в себя задачи «на движение».

Эти задачи, как правило, сводятся к системе двух уравнений с двумя неизвестными.

Задача 1. В первый день портной сшил несколько костюмов, а во второй день сшил их в три раза больше. Сколько костюмов сшил портной в первый день, если за два дня он сшил их 16?

Решение. Пусть x – количество костюмов, сшитых в первый день, у – количество костюмов, сшитых во второй день. В результате имеем систему из двух уравнений специального вида:

$$y = 3x, \qquad (1)$$

$$x + y = 16. \qquad (2)$$

Совершенно очевидно, что алгебраическая процедура решения этой системы в точности соответствует процедуре решения при моделировании «в отрезках» (см. рис. 4.1).

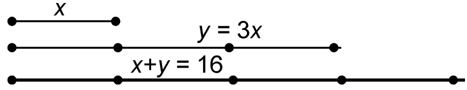

Рис. 4.1

Однако, *научить ребенка мыслить – это, в сущности, научить его строить разнообразные модели.* Наш педагогический опыт показывает, что желательно познакомить детей с задачами, для которых модели «в отрезках» не работают и которые, тем не менее, могут быть решены с помощью несложных и наглядных рассуждений. (Что касается алгебраического подхода к решению текстовых задач, то он, позволяя быстро получить ответ при помощи стандартных операций с символами, не способствует развитию образного и логического мышления.)

Задача 2 (см., например, [5]). Когда на каждую елку село по одному соловью, то один соловей остался без елки. А когда соловьи расселись на елках парами, то одна елка осталась без соловьев. Сколько было елок и сколько было соловьев?

Решение алгебраическое. Пусть x – количество соловьев, y – количество елок. В результате имеем систему из двух уравнений:

$$x = y + 1, \tag{3}$$

$$x = (y - 1)\cdot 2. \tag{4}$$

Подставляя x из (3) в (4), получаем

$$y + 1 = 2y - 2, \tag{4′}$$

откуда $y = 3$, $x = 4$.

Попробуем теперь решить эту же задачу при помощи «моделирования в отрезках». Соотношение (3), конечно, может быть изображено графически; однако, после того как масштаб на рисунке, изображающем соотношение (3), выбран, соотношение (4) изобразить «в отрезках» уже не удается. (Точно так же без *предварительных алгебраических преобразований* не удается изобразить «в отрезках» и равенство (4′).)

Решение арифметическое (основанное на мысленном моделировании).

1. Представим себе ряд из нескольких елок. На каждой сидит по соловью. Один соловей – «лишний», он висит в воздухе рядом с последней елкой – для него не хватило елки.

2. Пересадим «лишнего» соловья на первую елку, на ней теперь два соловья.

3. Пересадим теперь соловья с последней елки на вторую елку. На второй елке теперь тоже два соловья. А на последней елке – ни одного!

4. Никакие елки, кроме первой, второй и последней уже не нужны. Трех елок хватило, чтобы выполнить все условия задачи.

Ответ: три елки, четыре соловья.

В заключение приведем еще одну задачу, также не допускающую моделирование «в отрезках», но легко решаемую при помощи мысленного моделирования.

Задача 3. В школьном саду посадили клены по 16 штук в каждом ряду и столько же лип по 20 штук в каждом ряду, причем рядов получилось на 2 меньше. Во сколько рядов посажены клены?

Решение алгебраическое. Пусть x – количество рядов из кленов, y – количество рядов из лип. Тогда имеем систему:

$$y = x - 2, \tag{5}$$

$$16x = 20y. \tag{6}$$

Подставляя выражение для y из (5) в (6), получаем

$$16x = 20(x - 2), \text{ откуда } x = 10.$$

Нетрудно видеть, однако, что (непосредственно, без предварительных алгебраических преобразований) при помощи моделирования «в отрезках» система (5), (6) не решается.

Решение арифметическое (основанное на мысленном моделировании). Будем пересаживать липы так, чтобы они были посажены такими же рядами, как клены. Для этого выкопаем 4 липы из первого ряда и посадим их в новый ряд за последним рядом лип. Чтобы заполнить первый новый ряд, нужно выкопать по 4 липы из первых четырех старых рядов. Чтобы заполнить второй новый ряд нужно выкопать по 4 липы из следующих четырех старых рядов. Поэтому, посадив липы так же как клены, мы образуем 4 + 4 + 2 рядов.

Ответ: клены были посажены в 10 рядов.

Итак, мы видим, что достаточно обширный класс задач, не поддающийся решению при помощи моделирования «в отрезках», может быть решен арифметическим способом при помощи мысленного моделирования. Этот класс задач, безусловно, должен предшествовать в курсе математики задачам, которые рассчитаны на решение алгебраическим способом.

Замечание. В заключение попробуем охарактеризовать задачи, которые могут быть решены при помощи моделирования «в отрезках».

Прежде всего, это задачи, которые сводятся к системе из двух уравнений с диагональной матрицей (коэффициенты системы предполагаются целочисленными). Иными словами – это системы относительно неизвестных x, y вида

$$x = p, \tag{7}$$
$$mx + ny = q. \tag{8}$$

Системы вида

$$x = ay, \tag{9}$$
$$bx + cy = d, \tag{10}$$

(где a, b, c, d – целочисленные коэффициенты) также непосредственно, т.е. без предварительного применения алгебраических преобразований, поддаются решению при помощи моделирования «в отрезках». Обе системы (7), (8) и (9), (10) характеризуются тем, что *отрезок, изображающий одно из неизвестных (x или y) может быть выбран с самого начала произвольным образом*.

5. УСОХШИЕ ПРОЦЕНТЫ

В этом параграфе мы разберем еще одну известную текстовую задачу – «на проценты». Алгебраическое решение этой задачи, как правило, вызывает у учеников недоумение и воспринимается ими в известной мере формально.

Задача. В магазин привезли 100 килограммов ягод, влажность которых составляла 99%. Через некоторое время ягоды немного подсохли, и их влажность стала равна 97%. Сколько стали весить ягоды, привезенные в магазин?

Решение. Обозначим через x вес сухого вещества ягод. Имеем из условия:

$$x = 100 - 100 \cdot 0{,}99 = 1 \text{ (кг)}. \tag{1}$$

После усушки вес сухого вещества ягод, очевидно, не изменился, поэтому, обозначая через у (общий) вес ягод после усушки, очевидно, приходим ко второму уравнению:

$$\frac{y - x}{y} = 0{,}97. \tag{2}$$

Разрешая систему (1), (2) относительно у, неожиданно получаем:

$$y = 33\frac{1}{3}(\text{кг}).$$

Ответ: После усушки ягоды стали весить $y = 33\frac{1}{3}$ кг.

Итак, усохнув всего-навсего на 2%, ягоды стали почему-то весить втрое меньше…

Продвинутые ученики, понимают, конечно, в чем тут дело, но остальным полученный ответ кажется очень странным и даже неверным.

Тем самым возникает чисто педагогическая проблема – как изложить решение этой задачи, чтобы ее ответ сделался не странным, а, напротив, очевидным?

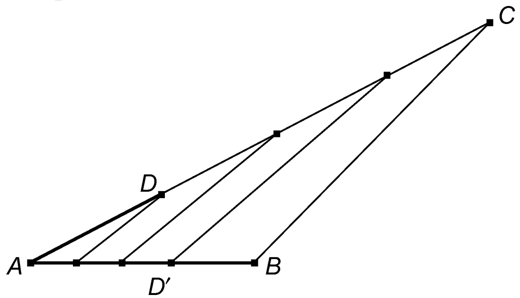

Рис. 5.1

Как показывает опыт, делу может помочь следующая геометрическая модель (которую, впрочем, редко используют[1]); см. рис. 5.1, где условно принято:

AC = 100 (кг), $AB = y$ (кг),
$AD = AD'$ = 1 (кг),
AD = 1% AC, AD' = 3% AB.

Глядя на этот рисунок, даже слабые ученики воспринимают тот факт, что *если отрезок AD составляет сотую долю известного отрезка AC, а отрезок, составляющий сотую долю от AB, в три раза короче, чем AD, то:*

$AB = \frac{1}{3}AC$, и тем самым $AB = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$ (кг).

[1] В свое время аналогичная модель обсуждалась с И. Христовой.

В результате обращения к этой геометрической модели, задача оказывается не формально «пройденной», а действительно понятой учениками.

6. ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧЕ О МАРШРУТАХ

Хорошо известно следующее правило комбинаторики – так называемое *правило произведения.* Если нужно выбрать упорядоченную пару элементов (a,b) и первый элемент пары можно выбрать

k способами, а *после того как первый элемент выбран,* второй элемент можно выбрать m способами, то упорядоченную пару, состоящую из этих двух элементов, можно выбрать $k \cdot m$ способами.

Доказывается это очень просто. Будем изображать возможный выбор первого элемента пары (a,b) в виде ствола дерева (см. рис. 6.1), а возможный выбор второго элемента пары – в виде ветки, растущей из верхнего конца ствола (см. рис. 6.2).

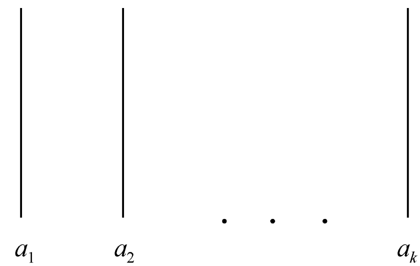

Рис. 6.1

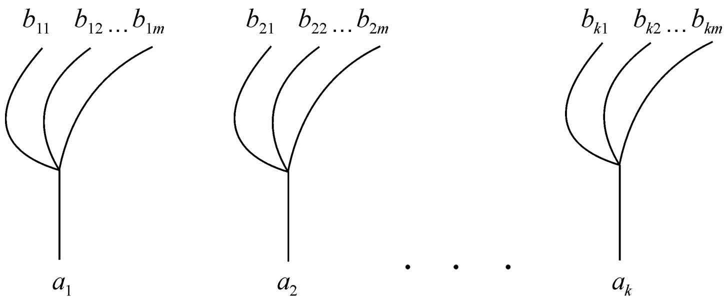

Рис. 6.2

Тогда выбору упорядоченной пары вида (a,b) будет соответствовать маршрут от «подножия» одного из k деревьев до верхушки ствола и затем по одной из m веток до самого верха. Нетрудно видеть, что всего таких маршрутов будет

$$m + m + \ldots + m = m \cdot k \qquad (1)$$

(слева в (1) k слагаемых). Маршруты мы считаем различными, если они не совпадают хотя бы в одной из своих частей.

Возможна ситуация, когда, например, $b_{11} = b_{21}$, но в этом случае нам приходится сравнивать маршруты (a_1, b_{11}) и (a_2, b_{21}), а они различны, ибо $a_1 \neq a_2$ по предположению.

Правило произведения легко обобщается на случай, когда требуется сосчитать число возможных *способов выбрать упорядоченную тройку элементов или, более общо, упорядоченный набор из* n элементов.

Применим теперь правило произведения к решению простейшей задачи. Пусть города A и B связаны сетью дорог, как показано на рис. 6.3.

Ехать из A в B можно только по направлениям, указанным стрелками (так что мы, по существу, имеем дело с ориентированным графом). Спрашивается, сколькими способами можно доехать из A в B? Нетрудно видеть, что выбор первого участка маршрута (до развилки) можно осуществить пятью способами, после чего выбрать второй участок пути всегда (т.е. при любом выборе первого участка) можно тремя способами. Таким образом, применимо правило произведения, и общее количество способов, которыми можно добраться из A в B, равно $5 \cdot 3 = 15$.

Поставим теперь следующий вопрос: а сколькими способами можно вернуться из B в A? (Разрешается ехать только против направления стрелок на рис. 6.3).

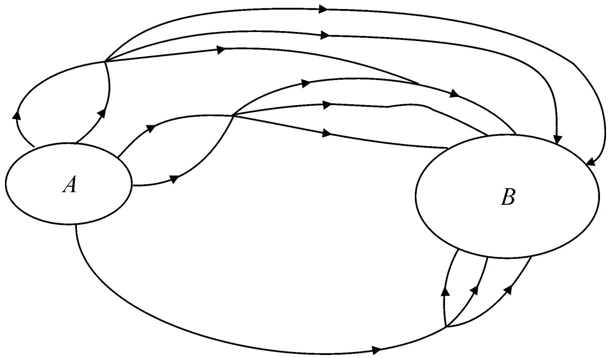

Рис. 6.3

Из рис. 6.3 очевидно, что правило произведения «в обратную сторону» не работает. Тем не менее, понятно, что каждому маршруту из *A* в *B* соответствует в точности один маршрут из *B* в *A* (мы увидим этот маршрут, если «прокрутим киноленту» в обратном направлении). Значит, вернуться из *B* в *A* можно по-прежнему 15-ю способами.

Любопытно, что в задачах о маршрутах возникает ситуация, в которой подсчет числа вариантов по-прежнему можно проводить по правилу произведения, но выбор «упорядоченной пары элементов» уже не столь очевиден, как раньше.

А именно, пусть на этот раз города *A* и *B* связаны сетью дорог, изображенной на рис. 6.4.

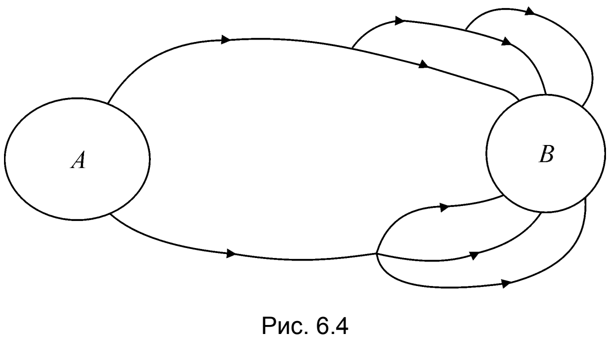

Рис. 6.4

Понятно, что в качестве упорядоченной пары (a, b) здесь следует брать пару: *(малый начальный участок маршрута, малый конечный участок маршрута).*

Выбор такой пары, очевидно, полностью определяет сам маршрут из A в B, и общее количество маршрутов из A в B вычисляется по правилу произведения и равно $2 \cdot 3 = 6$. Число маршрутов из B в A тем самым также равно шести.

Возможны еще более любопытные конфигурации дорог между A и B, к которым по-прежнему применимо правило произведения для подсчета числа возможных маршрутов из A в B (и, соответственно, из B в A). Пример такой конфигурации приведен на рис. 6.5.

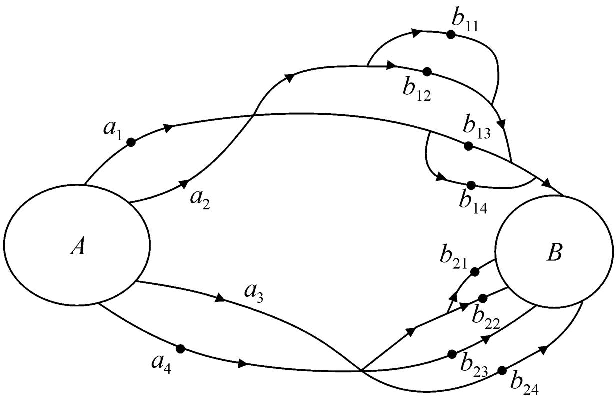

Рис. 6.5

В ситуации, изображенной на рис. 6.5, маршрут из A в B лучше всего задавать упорядоченной парой точек вида (a, b), которую удается подобрать так, что она однозначно определяет выбранный маршрут. Нетрудно видеть, что после того как выбрана первая точка упорядоченной пары (т.е. выбрана точка a_1, a_2, a_3 или a_4) выбор второй точки осуществляется одним из четырех способов. Поэтому в полном соответствии с правилом произведения число различных маршрутов из A в B на рис. 6.5 равно $4 \cdot 4 = 16$.

Рассмотрим еще один пример, когда маршрут из A в B определяется выбором *упорядоченной тройки* точек вида (a, b, c), расположенных на сети дорог (см. рис. 6.6).

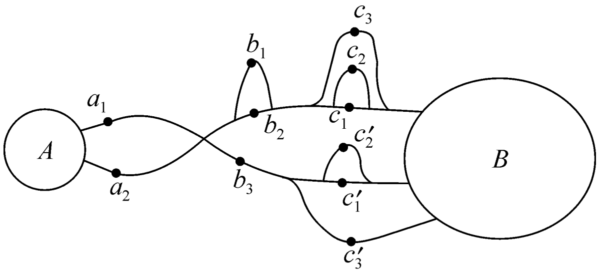

Рис. 6.6

Первая координата упомянутой упорядоченной тройки точек может быть выбрана двумя способами (a_1 или a_2). После того как этот выбор сделан вторая координата рассматриваемой упорядоченной тройки точек может быть выбрана тремя способами (b_1, b_2 или b_3). Наконец, после того как выбраны первая и вторая координаты упорядоченной тройки (a, b, c), третья координата тоже может быть выбрана одним из трех способов. Итак, по правилу произведения, число маршрутов из A в B на рис. 6.6 равно $2{\cdot}3{\cdot}3 = 18$.

Удобно ввести символ $\Pi_3(A, B)$ для характеристики маршрутов, связывающих «города» A и B на рис. 6.6. Здесь буква П указывает на то, что общее число маршрутов *при движении из A в B* может быть вычислено с помощью правила произведения, индекс «3» указывает на (минимальное) количество точек, с помощью которых мы однозначно задаем маршрут.

Предположим теперь, что города A и B связывают две непересекающиеся системы дорог, относящиеся, например, к классам $\Pi_3(A, B)$ и $\Pi_2(B, A)$ соответственно. Тогда количество маршрутов из A в B, относящихся к первой системе, согласно правилу произведения вычисляется по формуле $k{\cdot}m{\cdot}n$, где k, m, n – количества способов выбрать первую, вторую и третью точки, задающие каждый маршрут из A в B. Аналогично, количество маршрутов второй системы вычисляется по формуле $k'{\cdot}m'$, где k' и m' – количества способов выбрать соответственно первую и вторую точки, задающие маршруты второй системы (при движении из B в A). Поскольку число маршрутов, принадлежащих любой системе, в конечном итоге не зависит от того, а какую сторону направлено движение, заключаем, что в нашей задаче общее число маршрутов из A в B (и тем самым из B в A) будет равно $k{\cdot}m{\cdot}n+k'{\cdot}m'$.

(Заметим, что прямой подсчет числа маршрутов в задачах такого рода может быть весьма трудоемким делом.)

Дальнейшие обобщения предложенного подхода очевидны: рассмотренные системы маршрутов типа $\mathbf{\Pi}_k\,(A, B)$ можно использовать как «строительные блоки» для конструирования более сложных систем.

Замечание. В дальнейшем мы увидим, что правило произведения может успешно применяться в задачах совершенно иного сорта.

7. ОБ ОДНОМ КОМБИНАТОРНОМ СООТНОШЕНИИ

Опыт преподавания комбинаторики говорит о том, что наглядные геометрические соображения (если, конечно, ими удается воспользоваться) значительно облегчают усвоение материала. Например, важнейший закон комбинаторики – правило произведения – обычно иллюстрируют при помощи «деревьев»[1]. Эта же иллюстрация служит заодно вполне надежным доказательством упомянутого правила.

В этом параграфе приводится геометрическая иллюстрация (также являющаяся одновременно доказательством) другого известного комбинаторного закона – рекуррентного соотношения для числа сочетаний из n элементов по k элементов (C_n^k):

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \qquad (1)$$

Рассмотрим прямоугольник размера $m \times k$, составленный из единичных квадратов (см. рис. 7.1). Нас будет интересовать число маршрутов из нижнего левого угла A в правый верхний угол B (*двигаться можно только вверх или вправо по сторонам единичных квадратов*). Это число мы обозначим через $N(m, k)$.

Заметим теперь, что попасть в точку B можно только одним из двух способов: либо из точки C, либо из точки D, следовательно,

$$N(m,k) = N(m-1,k) + N(m,k-1) \qquad (2)$$

[1] См. предыдущий параграф.

(справедливость этого соотношения геометрически очевидна; при этом существенно то обстоятельство, что двигаться из точки A можно только либо вверх, либо вправо).

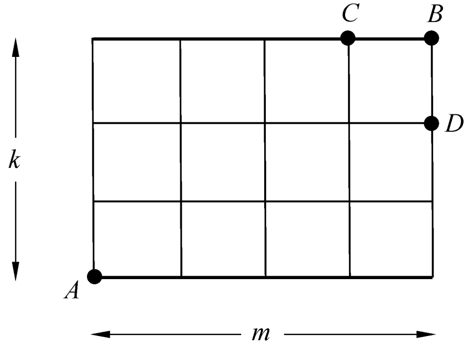

Рис. 7.1

Покажем теперь, что геометрически очевидное соотношение (2) это и есть, в сущности, другая (причем более симметричная!) форма записи комбинаторного равенства (1).

Действительно, длина любого маршрута из A в B равна в точности $m + k$. Пронумеруем теперь шаги произвольно взятого маршрута. Очевидно, что каждый маршрут полностью характеризуется номерами шагов, направленных вверх (этих шагов всего должно быть k штук). Тем самым каждый маршрут однозначно соответствует выбору k чисел из множества $\{1,2,\ldots, m + k\}$.

Следовательно,

$$N(m,k) = C_{m+k}^{k},$$

и мы можем переписать (2) в виде

$$C_{m+k}^{k} = C_{m+k-1}^{k} + C_{m+k-1}^{k-1}.$$

Полагая здесь $n = m + k$, приходим к искомому равенству (1).

8. ЧЕМУ РАВЕН НУЛЬ-ФАКТОРИАЛ?

Объясняя студентам – будущим педагогам начальных классов – начала комбинаторики, неизбежно приходится вводить функцию $n!$ («эн-факториал»). С педагогической точки зрения здесь имеется одно довольно узкое место.

Мы полагаем по определению, что

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 \text{ при } n \geq 1, \qquad (1)$$

а при n = 1 считаем опять же по определению, что

$$0! = 1. \qquad (2)$$

Соотношение (1) обычно не вызывает никаких затруднений – здесь все ясно: мы имеем дело с произведением всех натуральных чисел от n до 1. Но откуда берется соотношение (2)? Если не дать разумного, адекватного объяснения, четко указав то место, где действительно используется соглашение (2), то весь материал, связанный с биномиальными коэффициентами, будет воспринят отчасти на веру.

И тут у преподавателя, знакомого, естественно, с Гамма-функцией Эйлера, появляется искушение объяснить происхождение формулы (2) следующим образом.

При $n > 1$, очевидно, имеем

$$n! = (n-1)!\cdot n. \qquad (3)$$

Мы хотим сохранить это же самое соотношение при n = 1. Подставляя в (3) $n = 1$, получаем

$$1! = 0!\cdot 1, \qquad (4)$$

откуда и следует (2).

Однако соотношение (4) нигде в курсе комбинаторики не используется, и в результате остается непонятным, нельзя ли было положить 0! равным какому-нибудь другому числу, отличному от 1.

Выход из положения здесь, на наш взгляд, такой. Соображения (3), (4) можно (но не обязательно) рассказывать студентам в качестве дополнительного материала, но не стоит давать их непосредственно после формулы (2) для ее «оправдания».

Вместо этого, чтобы оправдать соглашение (2), на наш взгляд, следует сказать, что для того чтобы формулы, которые вскоре появятся, имели единообразный вид при всех n ≥ 0 (а не только при n ≥ 1) нужно, чтобы выражение

$$\frac{n!}{0!\,n!} \qquad (5)$$

равнялось 1. (Действительно, как известно, каждое выражение вида $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ при $0 < k < n$ представляет собой число сочетаний из n элементов по k элементов, т.е. число способов выбрать какие-нибудь k элементов из n данных элементов. При $k = 0$, очевидно, существует только один такой способ – не брать ни одного элемента.)

Поэтому неизбежно принятие соглашения (2). В результате, мы избегаем неприятного порочного круга в задаче: *«Сколькими способами можно выбрать 0 элементов из n элементов?»*

(Имеется в виду следующий порочный круг: *«Число этих способов равно числу сочетаний из n элементов по 0 элементов, т.е. равно выражению (5). Подставляя в (5) определение (2) для 0!, получаем в ответе 1»*).

9. ЗАДАЧА О СОСТАВЛЕНИИ БУКЕТА

Среди комбинаторных задач имеется серия таких, к которым правило произведения на первый взгляд неприменимо, и оттого эти задачи кажутся начинающему сложными. Однако при помощи простого рассуждения задачи этой серии могут быть переформулированы и затем решены именно с помощью вышеупомянутого правила произведения.

В качестве примера разберем одну из таких задач; прием, которым мы воспользуемся, заслуживает, на наш взгляд, специального рассмотрения на занятиях, посвященных комбинаторике.

Задача 1. Имеется 5 одуванчиков и 19 репейников. Сколькими способами можно составить из них букет, состоящий из трёх одуванчиков и семи репейников?

Решение. Букет, очевидно, представляет собой неупорядоченное множество, элементы которого выбираются из двух других **непересекающихся** неупорядоченных множеств – множества одуванчиков:

$$\text{ОД} = \{\text{ОД1}, \text{ОД2}, \ldots, \text{ОД5}\} \tag{1}$$

и множества репейников:

$$\text{Р} = \{\text{Р1}, \text{Р2}, \ldots, \text{Р19}\}. \tag{2}$$

Существенно, однако, то, что *каждому букету Б можно взаимно-однозначным образом сопоставить упорядоченную пару*

$$\text{Б} \leftrightarrow (\{\text{три одуванчика}\}; \{\text{семь репейников}\}). \tag{3}$$

Это оказывается возможным только потому, что множества (1) и (2) не пересекаются!

Здесь, как это обычно принято, мы обозначаем неупорядоченные множества, перечисляя их элементы в *фигурных* скобках, а элементы упорядоченных множеств перечисляем в *круглых* скобках. Таким образом, элементами упорядоченной пары

({три одуванчика); {семь репейников}) (4)

являются два неупорядоченных множества.

Теперь в силу взаимной однозначности соответствия (3) заключаем, что численность множества Б (т.е. искомое число различных букетов заданного состава) равна численности множества упорядоченных пар вида (4).Тем самым, применяя правило произведения для нахождения этой численности, получаем

Ответ: искомое число способов равно $C_5^3 \cdot C_{19}^7$; здесь C_n^k – число сочетаний из n элементов по k элементов.

Соображения вида (3) обычно считаются само собой разумеющимися и, как правило, опускаются в разделах, посвященных комбинаторике. Однако, на наш взгляд, проведенное рассуждение заслуживает большего внимания и, быть может, даже специального названия – например, «*обобщенного правила произведения*».

Разобранную выше задачу можно слегка видоизменить, причем изложенный выше прием снова продемонстрирует свою полезность.

Задача 2. Имеется 5 одуванчиков и 19 репейников. Сколькими способами можно составить из них букет, состоящий из десяти цветков и содержащий не менее трех одуванчиков?

Ответ: $C_5^3 \cdot C_{19}^7 + C_5^4 \cdot C_{19}^6 + C_5^5 \cdot C_{19}^5$.

10. О НЕКОТОРЫХ ТРУДНОСТЯХ В ПРЕПОДАВАНИИ ЛОГИКИ

Каждый педагог, ведущий начальный курс логики, сталкивается с необходимостью иллюстрировать логические законы на примерах, взятых из естественного языка. Здесь, однако, преподавателя логики подстерегают трудности, связанные с тем, что язык логики и естественный язык – неизоморфны.

Пример 1. Попробуем проиллюстрировать закон де Моргана

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B. \qquad (1)$$

(Здесь символы ¬, ∧ и ∨ обозначают соответственно *отрицание*, *конъюнкцию* и *дизъюнкцию* высказываний.)

Рассмотрим высказывание

«Я не буду поступать в МГУ и в МПГУ». (2)

По вышеприведенному закону де Моргана высказывание (2), казалось бы, следует понимать так:

«Я не буду поступать в МГУ <u>или</u> я не буду поступать в МПГУ», т.е.

«Я не буду поступать хотя бы в одно из этих учебных заведений». (3)

Однако, в естественном языке фраза (2) имеет вполне определенный смысл, не совпадающий с (3). А именно, смысл (2) таков:

«Я не буду поступать в МГУ <u>и</u> я не буду поступать в МПГУ». (2′)

Таким образом, использовать примеры вида (2) для иллюстрации упомянутого выше закона де Моргана – нельзя.

Еще более интересная ситуация возникает, когда мы имеем дело с высказываниями, содержащими кванторы общности ∀ и существования ∃.

Пример 2. Рассмотрим, например, следующий закон отрицания высказываний с квантором общности

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x) \qquad (4)$$

заметим при этом, что «утверждение»

$$\text{«} \neg(\forall x)P(x) = (\forall x)\neg P(x) \text{»} \qquad (4а)$$

является *грубой ошибкой*.

Попробуем теперь проиллюстрировать закон (4), отрицая высказывание:

«Каждый сумеет решить эту задачу». (5)

В соответствии с законом (4), правильно построенное отрицание имеет вид:

«Найдется человек, который не сумеет решить эту задачу». (6)

Однако, вопреки тому, что (4а) является грубой ошибкой, высказывание:

«Каждый – не сумеет решить эту задачу» (6а)

является вполне допустимым в естественном языке отрицанием высказывания (5).

Приведенные выше примеры говорят о том, что иллюстрации к законам логики, взятые из естественного языка, следует подбирать с осторожностью, а сам факт отсутствия изоморфизма между языком логики и естественным языком – следует подчеркнуть в самом начале вводного курса логики.

11. НЕСУЩЕСТВУЮЩИЕ ОБЪЕКТЫ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Выше мы уже говорили о том, что в преподавании начального курса логики имеются своеобразные трудности, связанные с отсутствием изоморфизма между естественным языком и языком, на котором написаны логические формулы.

Сейчас эта тема будет продолжена в несколько ином направлении.

Как хорошо известно, в математике не существует запрета на введение (временных) обозначений для несуществующих объектов. Например, если требуется решить в целых числах уравнение

$$31x + 572 = 1000,$$

то через x обозначают искомое (несуществующее) целочисленное решение, и лишь затем убеждаются, что такого решения нет.

Строго говоря, здесь следовало бы рассуждать от противного; однако, даже рассуждая со всей строгостью от противного, мы по-прежнему вынуждены вводить обозначение x для несуществующего объекта.

Здесь мы коснемся этого же вопроса применительно к преподаванию темы «Высказывания» в курсе логики. Разбирая эту тему, преподаватель неизбежно сталкивается с несуществующими объектами, которые ведут себя довольно парадоксальным образом.

Рассмотрим, например, высказывание:

Все Деды-Морозы делают подарки детям. (1)

Это высказывание, очевидно, следует считать **истинным**. Действительно, его отрицание выглядит следующим образом:

Существует Дед-Мороз, который не делает подарков детям. (2)

(Поскольку Дед-Мороз не существует, высказывание (2) – ложно, и, значит, высказывание (1) истинно.) В высказывании (1) мы имеем дело с (пустым) множеством, состоящим из всех Дедов-Морозов; ситуация радикально меняется, если мы имеем дело не с множеством, а с «единичным объектом», которого на самом деле не существует.

Действительно, рассмотрим теперь такое высказывание:

Дед-Мороз принес подарок Васе. (1′)

Однако (1′) в отличие от (1), очевидно, **ложно**! Дело в том, что (1′), в сущности, следует рассматривать не как простое, а как составное высказывание:

Дед-Мороз существует и Дед-Мороз принес подарок Ване. (1″)

Итак, здесь мы вновь столкнулись с неизоморфностью естественного языка и языка формальной логики, о чем, без сомнения, следует помнить преподавателю.

12. ИМПЛИКАЦИЯ И ВРЕМЯ

Теперь мы обсудим некоторые довольно любопытные вопросы, касающиеся взаимодействия хода логических рассуждений с ходом времени.

Общеизвестно, что никакое минимально содержательное рассуждение в естественном языке не может обойтись без слов «если…, то…». В логике аналогом этого союза является операция *импликация*.

Напомним, однако, что в отличие от естественной речи, где союз «если …, то…» применяется к парам высказываний, связанным по смыслу, имитирующая этот союз импликация применима к любой паре высказываний, независимо от того, связаны эти высказывания по смыслу или нет.

В частности, в силу введенного в формальной логике определения, условились считать истинными не только такие высказывания как *«Если данное число делится на 9, то оно делится на 3»,* но и высказывания вида: *«Если дважды два – четыре, то Волга* *впадает в Каспийское море»,* а также высказывания, составленные из таких пар, в которых первое из двух утверждений (посылка) ложно: *«Если дважды два – пять, то Волга впадает в Каспийское море»; «Если дважды два – пять, то Волга впадает в Аральское море».*

Может показаться, что импликация (обычно обозначаемая стрелкой →) представляет собой безобидное непосредственное обобщение союза «если…, то…». Но тогда логические законы, справедливые для операции →, казалось бы, не должны приводить к противоречию, если пользоваться ими в естественной речи.

Одним из таких законов является *закон контрапозиции,* утверждающий, что при любых истинностных значениях высказываний A и B высказывания A → B и (не B) → (не A) равносильны (т.е. одновременно истинны или одновременно ложны).

Рассмотрим теперь общеизвестную истинную импликацию

«Если ветер дует, то деревья качаются». (1)

Тогда высказыванием, противоположным к обратному (по отношению к (1)), очевидно, будет

«Если деревья не качаются, то ветер не дует». (1′)

В полном соответствии с законом контрапозиции это высказывание также оказывается истинным.

Посмотрим теперь, что будет, если мы переформулируем оба утверждения (1) и (1′) в прошедшем времени. Тогда наши утверждения примут соответственно вид

«Если ветер дул, то деревья качались»; (2)

«Если деревья не качались, то ветер не дул». (2′)

Вновь оба утверждения оказались истинными (и закон контрапозиции по-прежнему не нарушен).

Сформулируем теперь наши высказывания в будущем времени. Казалось бы, ничто не предвещает «краха» закона контрапозиции. Однако, мы получаем следующий довольно странный результат:

«Если ветер будет дуть, то деревья будут качаться»; (3)

«Если деревья не будут качаться, то ветер не будет дуть». (3′)

Неужели закон контрапозиции неверен?

Объяснение кажущегося парадокса состоит в следующем. В естественном языке мирно сосуществуют два различных по смыслу союза «если…, то…». Первый из них, который мы назовем *логическим следованием*, фактически утверждает:

«Если А, то одновременно с А имеет место и В».

Второй из упомянутых союзов, который мы назовем *причинным следованием*, в развернутом виде утверждает нечто иное:

«Если с некоторого момента А, то вскоре после этого имеет место и В».

Операция →, с которой мы имели дело всюду выше, представляла собой обобщение именно логического следования. Закон контрапозиции, справедливость которого установлена в формальной логике для операции →, вне всякого сомнения верен и для этого первого смыслового значения союза «если…, то…». При этом использование будущего времени при формулировке высказываний А и В никак не влияет на справедливость закона контрапозиции для операции логического следования. Например, одновременно истинны высказывания:

«Если число, которое ты задумаешь, будет делиться на 9, то оно будет делиться и на 3» и *«Если число, которое ты задумаешь, не будет делиться на 3, то оно не будет делиться и на 9».*

Отличие этой пары высказываний от (3), (3′) очевидно!

Мы предоставляем читателю возможность самостоятельно разобраться в том, почему к парам высказываний (1), (1′) и (2), (2′) закон контрапозиции оказался применим, а также в том, как следует видоизменить этот закон, чтобы он стал применим и к высказываниям в будущем времени, содержащим операцию причинного следования.

Эффект, аналогичный кажущемуся нарушению закона контрапозиции, возникает и для логического союза «тогда и только тогда, когда…». Например, высказывание

«На улице станет светло тогда и только тогда, когда взойдет солнце», (4)

очевидно, истинно и имеет, на первый взгляд, структуру А↔В. Однако, попытка поменять А и В местами немедленно приводит к абсурду:

«Солнце взойдет тогда и только тогда, когда на улице станет светло». (4′)

Любопытно, что высказывания, аналогичные (4′), но сформулированные в прошедшем и настоящем времени, по-прежнему абсурдны (в отличие от (1′) и (2′)).

13. КОВАРНЫЙ КУБ

По просьбе авторов в одном из вузов среди первокурсников был проведен опрос:

Можно ли « распилить» куб на четыре куба?

(При этом куб, который требовалось «распилить» указанным образом, был изображен на доске в проекции Кабине; см. рис. 13.1. В этой проекции отрезки, перпендикулярные проекционной плоскости, после проецирования составляют ½ их действительной длины.)

Первокурсники дружно (50 человек из 60) ответили – «можно!»

В группе, где студенты были знакомы с началами логики, вопрос был задан в следующей «научной» форме (и было дано значительное время для обдумывания):

Истинно ли утверждение: <<Куб невозможно «распилить» на четыре куба>>?

Ответом было всеобщее: «Нет, это утверждение ложно!»

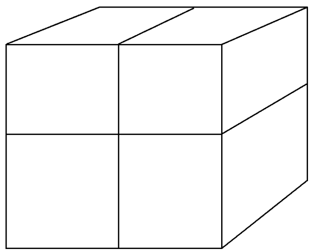

Рис. 13.1

Однако, распилить куб на четыре куба действительно невозможно. Нетрудно показать, что наименьшее число кубов, на которые можно «распилить» исходный куб, равно восьми.

Доказать это можно, например, так. Никакие две вершины исходного (большого) куба не могут одновременно принадлежать ни одному из получившихся в результате распиливания кубиков. Однако, у исходного куба 8 вершин. Поэтому маленьких кубиков после распиливания получится по крайней мере восемь.

Надо сказать, что, познакомившись с этим простым рассуждением, студенты были сильно удивлены.

Вообще, на наш взгляд, должен существовать обязательный (и для гуманитариев, и для «технарей») список задач, развивающих воображение. И, пожалуй, задачу о распиливании куба следовало бы в него включить.

Задача. *Истинно ли утверждение: <<Квадрат невозможно разрезать на три квадрата>>?*

14. ПОЧЕМУ ДЕЛЕНИЕ НЕ ДИСТРИБУТИВНО СЛЕВА?

Выпускники школ обычно прекрасно справляются с «раскрытием скобок» в выражениях, где нужно воспользоваться дистрибутивностью умножения относительно сложения и вычитания:

$$(a \pm b)\cdot c = a\cdot c \pm b\cdot c, \qquad (1)$$

$$c\cdot(a \pm b) = c\cdot a \pm c\cdot b \qquad (2)$$

и правильно раскрывают скобки в выражениях вида

$$(a \pm b):c = a:c \pm b:c \qquad (3)$$

(пользуясь дистрибутивностью *справа* деления относительно сложения и вычитания).

Неприятность, однако, заключается в том, что многие ученики, по аналогии с парой соотношений (1), (2), «раскрывают скобки» и в формулах вида c: $(a \pm b)$, приравнивая это выражение c:$a \pm c$:b (что, естественно, является грубой ошибкой). Доказать, что, вообще говоря,

$$c: (a \pm b) \neq c:a \pm c:b \qquad (4)$$

очень легко с помощью контрпримера:

20: (4+1) = 4, в то время как 20:4 + 20:1 = 25.

Преподаватель, ограничиваясь подобным контрпримером, предлагает ученикам просто-напросто *запомнить*, что для умножения имеет место двусторонняя дистрибутивность относительно сложения и вычитания, а для деления – справедлива только дистрибутивность справа. Однако запомненное, но не понятое сведение, как показывает наш педагогический опыт, учениками к концу обучения в школе забывается.

Однако причина отличия пары (1), (2) от (3), (4) очень проста и заключается в том, что умножение вещественных чисел коммутативно, а деление – нет. Действительно, из (1) сразу же вытекает соотношение (2) в силу коммутативности умножения ; в то же время из (3) вывести аналогичное равенство невозможно в силу некоммутативности деления. На наш взгляд, сообщать ученикам это простое соображение совершенно необходимо.

15. ОБОБЩЕННАЯ ДИАГРАММА ЭЙЛЕРА

Как хорошо известно, если имеются одно, два или три свойства (которые обозначим (a), (b), (c)), характеризующие элементы некоторого множества М, то классы, на которые разбиваются элементы множества М, удобно геометрически представлять на диаграмме Эйлера. Если же число свойств, по которым идет классификация элементов множества М, больше трех, то пользоваться диаграммой Эйлера неудобно. В общем случае, когда рассматриваются n свойств, справедлива следующая теорема (см. [4]): **максимальное число различных классов, на которые при помощи *n* свойств может быть разбито множество М, равно 2^n.** Этот факт доказывается в [4] из комбинаторных соображений.

Заметим, однако, что если с самого начала использовать не диаграмму Эйлера, а предлагаемую ниже ее модификацию, то сформулированная теорема может быть доказана на рисунке. Рассмотрим вначале случай трех свойств; «места» для элементов множества М, обладающих свойством (a), будем условно обводить кружком, «места» для элементов, обладающих свойством (b) – квадратом; «места» для элементов со свойством (c) – треугольником.

Вначале отметим в большом прямоугольнике, изображающем множество М, место для элементов со свойством (a) – для этого, очевидно, достаточно нарисовать *один кружок*. Тем самым элементы из М, в принципе, могут быть разбиты на два класса – на элементы со свойством (a) и на элементы без этого свойства (любой из этих классов может быть пуст). Далее, отметим на рисунке места, где в принципе могут располагаться элементы со свойством (b): для этого, очевидно, придется нарисовать *два квадрата:* один внутри кружка и еще один вне кружка. Теперь будем отмечать места для элементов со свойством (c): нам, очевидно, придется нарисовать *четыре треугольника* (см. рис. 15.1). Каждый раз, добавляя возможные места для элементов со следующим новым свойством, мы рисуем в точности столько новых символов, сколько было построено различных возможных классов на предыдущем шаге. Иными словами, на каждом новом шаге число различных возможных классов, отвечающих нашему разбиению, *удваивается.* Поскольку для одного-единственного свойства (a) возможных классов было 2, мы, очевидно, получили наглядное геометрическое доказательство сформулированной выше теоремы.

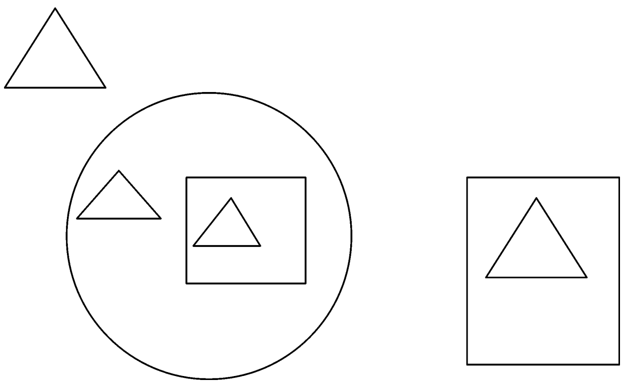

Рис. 15.1

В заключение параграфа приведем задачу, иллюстрирующую связь между классическими диаграммами Эйлера и предложенным их вариантом.

Задача. На острове Буяне расположена пиратская база, где в круглых и прямоугольных башнях содержатся 113 пленников. Круглых башен 7, прямоугольных 10. Три круглые башни – внутри трех прямоугольных, четыре круглые башни – внутри четырех круглых. Семьдесят семь пленников содержатся в круглых башнях, восемьдесят восемь – в прямоугольных. Однажды все 113 пленников сбежали – им удалось перелезть через стены башен. Скольким пленникам пришлось перелезать через две стены?

16. ЗМЕЙ ГОРЫНЫЧ И ТРАНЗИТИВНОСТЬ

Пусть М – некоторое множество (для определенности – конечное). *Отношением* на множестве М называют закон, который сопоставляет некоторым элементам из М какие-нибудь (другие или те же самые) элементы этого множества.

Таким образом, отношение на множестве – это чрезвычайно общее понятие. Здесь мы напомним лишь некоторые свойства отношений, которые понадобятся для решения приводимой ниже задачи про Змея Горыныча.

Но прежде рассмотрим пример. Пусть М – это множество из 10 человек, а Р – отношение, заданное на М следующим образом:

Р: «человек ***a*** – брат человека ***b***».

Тот факт, что «человек ***a*** – брат человека ***b***» мы будем коротко записывать в виде: ***a***Р***b***.

Изобразим теперь элементы нашего множества М в виде точек на плоскости, обозначив их соответственно ***a,b,c,d,…***. При этом, если, например, имеет место соотношение ***a***Р***b***, из точки ***a*** проведем стрелку к точке ***b*** и с другими точками поступим аналогичным образом (см. рис. 16.1). Рисунок, который у нас получился, называется *графом отношения* Р.

Упражнение. Как объяснить, что на рис. 16.1 некоторые стрелки заострены с двух сторон, а некоторые – только с одной?

Определение 1. С кажем, что отношение Р (заданное на некотором множестве М) *асимметрично*, если ни для какой пары элементов ***a,b*** из множества М не может одновременно быть ***a***Р***b*** и ***b***Р***a***.

На графе асимметричного отношения, очевидно, никакие стрелки не могут быть заострены с двух сторон.

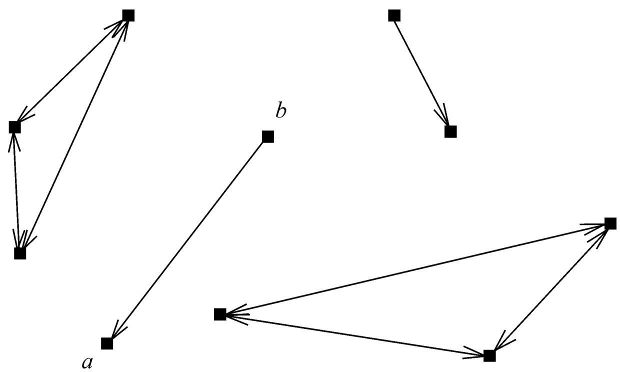

Рис. 16.1

Определение 2. Скажем, что отношение P, заданное на множестве M, *транзитивно*, если для любых трех элементов **a,b,c** из M одновременная справедливость ***a***P***b*** и ***b***P***c*** влечет за собой справедливость ***a***P*c*.

На графе транзитивного отношения, таким образом, одновременно с составным путем (вдоль стрелок), идущим из ***a*** в ***c*** через ***b,*** существует стрелка, непосредственно идущая из ***a*** в ***c***.

Определение 3. Отношение P, заданное на множестве M, называется *связным*, если для любых двух элементов ***a, b*** из M справедливо хотя бы одно из двух соотношений: ***a***P***b***, ***b***P***a.***

Определение 4. Отношение P задает на множестве M *линейный порядок*, если оно асимметрично, транзитивно и связно.

Пример. Пусть множество M состоит из n человек. Очевидно, что линейно упорядочить множество M – это поставить людей, составляющих данное множество, в очередь друг за другом. Заметим, что в силу правила произведения из n людей можно образовать $n!$ различных очередей.

Преподавая тему «Отношения на множестве», авторы столкнулись с некоторым дефицитом интересных, но несложных задач.

Предлагаемая ниже задача представляет собой попытку компенсировать упомянутый дефицит.

Задача 1. В стране Карабасии N городов, причем каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением (направление движения показано стрелкой на специальных дорожных указателях). Однажды ночью в Карабасию прилетел Змей Горыныч и переставил указатели так, что на следующее утро ни один из жителей Карабасии, выехавший из своего города, не смог потом вернуться домой. Требуется выяснить:

а) Как это удалось сделать Змею Горынычу?

б) Сколькими различными способами мог осуществить Змей Горыныч свою затею?

Решение. а) На первый взгляд, задача кажется трудной. Однако решение ее очнь простое. Нужно перенумеровать числами от 1 до N все города Карабасии и установить дорожные указатели так, чтобы каждая стрелка указывала направление от города с меньшим номером к городу с большим номером. Тогда, выехав из произвольно взятого города, в него будет невозможно вернуться. (При этом из города с номером N невозможно будет выехать.)

б) **Ответ**: $N!$

Задача 2. Верно ли, что если из каждого города в Карабасии можно выехать, то найдется хотя бы один город, в который можно будет вернуться? (Движение по всем дорогам Карабасии одностороннее.)

17.Признаки делимости на 9 и 11 и математические фокусы [7]

Расскажем теперь о трех замечательных математических фокусах, основанных на признаке делимости на 9 и его обобщениях. Критерий делимости на 9 звучит так:

Делимость суммы цифр натурального числа n на 9 равносильна делимости на 9 самого число n. (Подразумевается, что число n записано в десятичной системе счисления.) Напомним следствие этого критерия: *натуральное число дает при делении на 9 такой же остаток, как и сумма его цифр.* Данные математические факты лежат в основе нескольких популярных фокусов.

Пример 1. Прежде всего, это знаменитый и широко распространенный в Интернете «Угадыватель мыслей». Мы не будем вдаваться в детали этого великолепного фокуса, отсылая читателя непосредственно в Интернет. (Указание на то, что в основе этого фокуса лежит признак делимости на 9, уже является подсказкой).

Пример 2. Рассмотрим задачу, известную с давних пор, и приведенную, в частности, в [8].

В примере на сложение

$$ЯВЬ + СОН + МРАК = \ldots \qquad (1)$$

зритель – человек из публики - заменяет буквы цифрами (от 0 до 9), причем разные буквы - разными цифрами. В остальном замена букв цифрами произвольна. Далее, зритель сообщает фокуснику все цифры суммы (в произвольном порядке!), за исключением какой-то одной цифры. Если какая-то цифра суммы повторяется несколько раз, то столько же раз она и говорится. После этого отгадчик мгновенно называет недостающую цифру.

Вот объяснение этого нехитрого фокуса. Присмотримся: в (1) все 10 букв разные. Поэтому они обязательно будут заменены всеми десятью цифрами, каждая из которых будет участвовать в числовой записи примера ровно один раз. Сумма цифр $0 + 1 + 2 + \ldots + 9$ равна 45 и делится на 9. Следовательно, сумма трех чисел («ответ») в примере (1) также делится на 9. Но отсюда, в свою очередь, следует, что и сумма цифр «ответа» делится на 9. Теперь единственная неназванная цифра очевидным образом восстанавливается. Пусть, например, из четырех цифр «ответа» названы три цифры: 1, 3, 9. Их сумма 13; ближайшее большее число, делящееся на 9, – это 18. Значит, недостающая неназванная цифра – это 5.

Следует сказать, что фокусник-отгадчик не может, не имея дополнительной информации, различить недостающую цифру 0 от недостающей цифры 9. Так бывает, когда сумма названных цифр кратна 9. Например,

123+456+7890 = 8469. Если зритель называет цифры 8, 4 и 6 (сумма которых равна 18), то фокусник, опираясь только на вышеизложенные соображения, не может определить, будет ли неназванная цифра нулем или девяткой.

Задача. Существует ли такое распределение цифр в (1), когда ответ записывается при помощи цифр 8, 4, 6 и 0 ?

Невзирая не этот мелкий дефект, фокус у студентов и школьников всегда пользуется неизменным успехом.

Пример 3. Третий математический фокус основан на следующей модификации критерия делимости на 9 (см., например, [9].) А именно, алгебраическая сумма нескольких натуральных чисел делится на 9 тогда и только тогда, когда делится на 9 алгебраическая сумма взятых в скобки сумм соответствующих цифр.

Рассмотрим буквенный пример:

АПЕЛЬСИН – СПАНИЕЛЬ = … (2)

Как и в предыдущем примере, загадывающий заменяет буквы цифрами (разные буквы заменяются разными цифрами, одинаковые – одинаковыми), причем так, чтобы разность (2) была положительной. Затем он сообщает отгадчику в произвольном порядке все цифры разности (2) (именуемой в дальнейшем «ответ»), кроме какой-то одной цифры. Если какая-то цифра суммы повторяется несколько раз, то столько же раз она и говорится. Фокусник легко вычисляет эту цифру, руководствуясь следующими соображениями. Слова «апельсин» и «спаниель» содержат в точности одни и те же наборы букв (то есть одно является *анаграммой* другого)! Поэтому после замены букв цифрами по указанному правилу разность (2) будет делиться на 9. Здесь используется модификация критерия делимости на 9. Наконец, согласно критерию делимости на 9 заключаем, что сумма цифр «ответа» также должна делиться на 9. Теперь недостающая цифра «ответа» восстанавливается.

Замечание. Как и в предыдущем примере, если неназванная цифра – ноль или девять, то различить их отгадчику не удается.

Например,

7654321 – 1234567 = 6419754. Если зритель называет цифры 6,4,1,7,5,4, то отгадчик (он же фокусник) , опираясь лишь на приведенные выше рассуждения, снова не может определить, будет ли неназванная цифра нулем или девяткой.

Задача. Существует ли такое распределение цифр в (2), когда ответ записывается при помощи цифр 6,4,1,7,5,4 и 0 ?

Итак, возможность нахождения *одной* неназванной цифры в примерах такого рода действительно существует. Оказывается, что незначительно изменив постановку задачи, можно в похожих примерах восстанавливать не одну, а две цифры.

Пример 4. Рассмотрим буквенное выражение:

КОТ УЧЕН НО – ОН НЕЧУТОК = …   (3)

Здесь также требуется заменить буквы цифрами; при этом пробелы между словами, стоящими перед знаком «минус» (КОТ, УЧЕН, НО), а также между словами, расположенными после знака «минус» (ОН, НЕЧУТОК) – игнорируются. Таким образом, после замены букв цифрами выражение (3) превратится в разность двух девятизначных чисел. Заранее оговаривается, что эта разность (именуемая в дальнейшем «ответ») должна быть положительной. Теперь загадывающий называет отгадчику *по порядку* (справа налево) все цифры «ответа», за исключением *каких-либо двух соседних* цифр, например, первой и второй (считая справа налево).

Это, однако, не все; чтобы восстановить неназванные две цифры отгадчику нужно еще знать, сколько раз в процессе вычитания в примере (3) «занимали» единицу в старшем разряде. Получив ответ на этот вопрос, отгадчик (владеющий техникой устного счета) легко называет две утаенные цифры.

Объяснение примера 4. Заметим, прежде всего, что (3) (в отличие от (2)) представляет собой *палиндром*, причем каждая половина этого палиндрома содержит *нечетное число* (девять) букв. Действуя, как в предыдущем примере, мы сразу можем сказать, что сумма всех цифр «ответа» делится на 9. Однако, зная, сколько раз в процессе вычитания «занимали» единицу в старшем разряде, можно сказать больше. Пусть единицу «занимали» Q раз; обозначим неназванные цифры соответственно через x и y. Нетрудно видеть, что тогда справедливо равенство:

$$x + y + \textit{сумма названных цифр} = 9Q. \qquad (4)$$

Действительно, каждый раз, занимая при вычитании единицу в старшем разряде, мы добавляем в сумму цифр разности число 10 и одновременно с этим уменьшаем сумму цифр разности на единицу.

Вспомним теперь критерий делимости на 11: *Натуральное число, записанное в десятичной системе, делится на 11 тогда и только тогда, когда его знакочередующаяся сумма цифр делится на 11.* Нам, однако, потребуется не сам этот критерий, а его очевидное обобщение на случай *алгебраической суммы* нескольких натуральных чисел. Это обобщение звучит следующим образом. Алгебраическая сумма нескольких натуральных чисел делится на 11 тогда и только тогда, когда делится на 11 алгебраическая сумма заключенных в скобки знакочередующихся сумм цифр соответствующих чисел. (Все упомянутые знакочередующиеся суммы цифр должны начинаться с цифры разряда единиц.) В результате получаем второе уравнение:

$$x - y + \textit{знакочередующаяся}$$
$$\textit{сумма названных цифр} = 11z. \qquad (5)$$

Нетрудно показать, что целочисленное решение системы (4), (5) относительно $x, y, z,$ удовлетворяющее условию $0 \le x,\ y \le 9$, единственно. Покажем, например, что цифра x определяется из системы (4),(5) однозначно. Действительно, складывая уравнения (4) и (5) и деля результат пополам, легко получаем, что

$$x = \frac{9Q + 11z}{2} \text{ – } \textit{известное целое число,} \qquad (6)$$

где *известное целое число* – это сумма всех тех названных цифр, которые расположены на нечетных местах (при движении от младших разрядов к старшим). Однако в (6) имеется только *один* неизвестный параметр (а именно z), от которого может зависеть искомая цифра x . Теперь из соображений четности ясно, что цифра x определяется с помощью (6) единственным образом.

Рассмотрим числовой пример, положив в (3)

К=7, О=6, Т=5, У=4, Ч=3, Е=2, Н=1. Тогда (3) принимает вид:

765432116 – 611234567 =154197549

(две младшие цифры разности не называются; таким образом, мы с самого начала знаем, что $x = 9$, $y = 4$) . Нетрудно видеть также, что в процессе вычисления разности единицу в старшем разряде мы занимали 5 раз; таким образом, $Q = 5$.

Теперь уравнения (4) и (5) примут соответственно вид:

$x + y + 5 + 7 + 9 + 1 + 4 + 5 + 1 = 45,$

$x - y +5 - 7 + 9 - 1 + 4 - 5 + 1 = 11z,$

откуда

$$x + y = 13, \qquad (7)$$

$$x - y = 11z - 6.$$

Складывая два последних уравнения и деля результат пополам, получаем:

$x = (11z + 7)/2$;

очевидно, что при целочисленном параметре z существует единственное целочисленное значение $x = 9$, удовлетворяющее этому соотношению и принадлежащее числовому промежутку от 0 до 9. Отсюда в силу (7) однозначно восстанавливается значение $y = 4$.

В заключение – еще один пример, основанный на упомянутом в начале статьи следствии критерия делимости на 9.

Пример 5. Рассмотрим буквенное выражение:

$$\text{МОХ} + \text{ГРИБ} + \text{ТИШЬ} = \ldots \qquad (8)$$

Загадывающий заменяет буквы в (8) цифрами и называет (в произвольном порядке) все цифры суммы. Отгадчик мгновенно называет цифру, которой была заменена буква И.

Указание. Сумма цифр = 45 + И.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\forall$ – квантор общности ($\forall x$ – «для всех x»);

$\exists$ – квантор существования ($\exists x$ – «найдется x»);

$\vee$ – дизъюнкция высказываний (A$\vee$B – «A или B», в смысле «хотя бы одно из двух»);

$\wedge$ – конъюнкция высказываний (A$\wedge$B – «A и B»);

$\neg$ – отрицание высказывания ($\neg$A – «не A», «неверно, что A»);

$\to$ – импликация высказываний (A$\to$B – «если A, то B»);

$\leftrightarrow$ – эквиваленция высказываний (A$\leftrightarrow$B – «A тогда и только тогда, когда B»);

C_n^k – число сочетаний из n элементов по k элементов, т.е. число различных k-элементных подмножеств n-элементного множества;

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванова Е.А., Локшин А.А.* О парадоксе математической индукции / Актуальные проблемы современной науки, 2008, № 2, с. 194–195.

2. *Локшин А.А*. Свободная воля и математика / Знание-Сила, 2010, № 3, с. 86–90. См. также

http://www.inauka.ru/math/article100025.html

3. *Ефимов Н.В*. Высшая геометрия. – М.: Наука, 1978.

4. *Мерзон А.Е., Добротворский А.С., Чекин А.Л.* Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов. – М., 1998.

5. *Козлова Е.Г.* Сказки и подсказки. Задачи для математического кружка. – М.: МЦНМО, 2004.

6. *Энгелер Э.* Метаматематика элементарной математики. – М.: Мир, 1987.

7. *Локшин А.А., Иванова Е.А*. Признаки делимости и математические фокусы / Математика в школе, 2012, №6.

8. Кордемский Б.А., Ахадов А.А. Удивительный мир чисел. – М., 1996.

9. Добротворский А.С. и др. Задачник по математике для факультетов начальных классов. – М., МГПИ, 1983.